

Ex.13 证明. 用 A 表示向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, B 表示向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$,
(A, B)表示向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$.

先证

向量组 A 可由向量组 B 线性表示 $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A, B)$.

“ \Rightarrow ”设向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 显然, 向量组 B 也可由向量组 B 线性表示, 因此, 向量组(A, B)可由向量组 B 线性表示, 于是, $\text{rank}(A, B) \leq \text{rank}(B)$. 另一方面, 由向量组 B 也可由向量组(A, B)线性表示知, $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A, B)$. 所以, $\text{rank}(B) = \text{rank}(A, B)$.

“ \Leftarrow ”设 $\text{rank}(B) = \text{rank}(A, B) = r$. 再设向量组 B 的一个最大无关组为 B_0 , 且 B_0 由 r 个向量组成. 显然, B_0 也是向量组(A, B)的一个线性无关组, 又 $\text{rank}(A, B) = r$, 因此, B_0 是向量组(A, B)的一个最大无关组, 所以, 向量组 A 可由向量组 B_0 线性表示, 而向量组 B_0 可由向量组 B 线性表示, 因此, 向量组 A 可由向量组 B 线性表示.

再证

向量组 A 与向量组 B 等阶 $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(A, B)$.

根据

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A, B) \Leftrightarrow$ 向量组 A 可由向量组 B 线性表示,

$\text{rank}(B) = \text{rank}(B, A) \Leftrightarrow$ 向量组 B 可由向量组 A 线性表示.

所以, $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(A, B) \Leftrightarrow$ 向量组 A 与向量组 B 可互相线性表示, 即向量组 A 与向量组 B 等阶.